

# Chapitre 18. Espaces vectoriels de dimension finie

## 1 Définitions et lemmes fondamentaux

### 1.1 Sous-familles

**Définition 1.1.**

- \* Une sous-famille d'une famille  $F = (x_i)_{i \in I}$  est une famille de la forme  $(x_j)_{j \in J}$  où  $J \subseteq I$
- \* En particulier, une sous-famille de  $(x_i)_{i=1}^n$  est une famille de la forme  $(x_{i_k})_{k=1}^r$  où  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$

**Proposition 1.2.** Soit  $F$  une famille de vecteurs d'un ev  $E$  et  $G$  une sous-famille de  $F$ .

- \* Si  $F$  est libre, alors  $G$  aussi.
- \* Si  $G$  est génératrice, alors  $F$  aussi.

**Lemme 1.3** (Lemme de précipitation). Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille libre d'un ev  $E$  et  $y \in E$ . Alors  $(x_1, \dots, x_n, y)$  est liée ssi  $y \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$

### 1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

On fixe un ev  $E$ .

**Lemme 1.4** (Théorème de la base incomplète, version forte).

Soit  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$  une famille de vecteurs de  $E$  telle que :

- \*  $(x_1, \dots, x_n)$  libre.
- \*  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$  génératrice.

Alors il existent  $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq p$  tels que  $(x_1, \dots, x_n, y_{j_1}, \dots, y_{j_r})$  soit une base de  $E$ .

**Corollaire 1.5** (théorème de la base extraite). Soit  $(y_1, \dots, y_p)$  une famille génératrice de  $E$ .

Alors on peut en "extraire" une base : il existe  $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq p$  tels que  $(y_{j_1}, \dots, y_{j_r})$  soit une base de  $E$ .

**Corollaire 1.6.**  $E$  admet une base finie ssi  $E$  admet une famille génératrice finie.

**Définition 1.7.** On dit que  $E$  est de dimension finie s'il admet une base finie (ou une famille génératrice finie, puisque c'est équivalent).

**Corollaire 1.8** (Théorème de la base incomplète, version faible). Supposons  $E$  de dimension finie.

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ . On peut alors la "compléter" en une base : on peut trouver  $z_1, \dots, z_r \in E$  tels que  $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_r)$  soit une base de  $E$ .

### 1.3 Dimension

**Lemme 1.9** (Lemme de l'échange de Steinitz). Soit  $e_1, \dots, e_n \subseteq E$ .

Alors toute famille de  $n + 1$  vecteurs de  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  est liée.

**Corollaire 1.10.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

- \* Si  $\mathcal{L}$  est une famille libre de vecteurs de  $E$  et  $\mathcal{G}$  une famille génératrice de vecteurs de  $E$  alors  $\mathcal{G}$  a au moins autant d'éléments que  $\mathcal{L}$ .
- \* Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments.

**Définition 1.11.** Soit  $E$  un evdf [ev de dimension finie].

On en définit sa dimension  $\dim E \in \mathbb{N}$  comme étant le nombre de vecteurs de ses bases.

### Définition 1.12.

- \* Une droite (vectorielle) est un ev de dimension 1.
- \* Un plan (vectoriel) est un ev de dimension 2.

**Théorème 1.13.** Soit  $E$  un evdf et  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

Alors :

- \* Si  $\mathcal{F}$  est libre, on a  $n \leq \dim E$
- \* Si  $\mathcal{F}$  est génératrice, on a  $\dim E \leq n$
- \* Si  $n = \dim E$ , alors LASSÉ :
  - $\mathcal{F}$  libre.
  - $\mathcal{F}$  engendre  $E$ .
  - $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ .

## 1.4 Retour aux familles échelonnées

**Théorème 1.14.** Soit  $P_0, P_1, \dots, P_k \in K[X]$  tels que  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \deg P_i = i$ .

Alors  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $K_n[X]$ .

## 1.5 Classification des evdf à isomorphisme près

**Théorème 1.15.** Soit  $E, F$  deux ev.

- \* Si  $E$  et  $F$  sont isomorphes,  $E$  est de dimension finie si et seulement si  $F$  l'est.
- \* Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors  $E$  et  $F$  sont isomorphes ssi  $\dim E = \dim F$ .

## 2 EV de dimension infinie (hors-programme)

Si  $E$  possède une famille libre infinie  $(e_i)_{i \in I}$ , alors  $E$  est de dimension infinie (càd qu'il n'est pas de dimension finie).

En effet, si  $E$  était de dimension finie  $d = \dim E$  on pourrait extraire de  $(e_i)_{i \in I}$  une famille (nécessairement libre) à  $d + 1$  vecteurs, ce qui est absurde. Cela donne des exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie :

- \*  $K[X]$ , avec sa base  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$
- \*  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , e.g.  $\left( \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \dots, ) \\ (0, 1, 0, 0, \dots, ) \\ (0, 0, 1, 0, \dots, ), \text{etc...} \end{array} \right)$
- \*  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , ou  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e.g.  $(x \rightarrow e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$

Toute la suite du B est hors-programme.

### 2.1 Existence de bases

- \* Le lemme de précipitation marche très bien avec des familles infinies.
- \* Le théorème de la base incomplète reste vrai avec essentiellement la même preuve : la famille libre maximale est fournie par le lemme de Zorn.

**Lemme 2.1.** Soit  $(I_\tau)_{\tau \in T}$  une famille d'ensembles telle que  $\forall \tau_1, \tau_2 \in T, I_{\tau_1} \subseteq I_{\tau_2}$  ou  $I_{\tau_2} \subseteq I_{\tau_1}$

On note  $I = \bigcup_{I \in T} I$  et on prend une famille  $(x_i)_{i \in I}$ .

Si toutes les familles  $(x_i)_{i \in I_\tau}$  sont libres, alors  $(x_i)_{i \in I}$  est libre.

**Corollaire 2.2.** Tout espace vectoriel admet une base.

## 2.2 Définition de la dimension

**Lemme 2.3.** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  et  $(y_j)_{j \in J}$  une famille libre de vecteurs de  $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ . Alors il existe une injection  $J \rightarrow I$ .

**Corollaire 2.4.** Si  $(e_i)_{i \in I}$  et  $(f_j)_{j \in J}$  sont deux bases d'un même ev  $E$ , alors  $I$  et  $J$  sont en bijection.

## 2.3 Bases de Hamel

**Définition 2.5.** Une base de Hamel est une base du Q-ev  $\mathbb{R}$ .

# 3 Sous-espaces vectoriels et dimensions

## 3.1 Inégalité des dimensions, base adaptée

**Théorème 3.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sev de  $E$ .

Alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ .

**Théorème 3.2.** Soit  $E$  un evdf et  $F$  un sev de  $E$ .

Alors il existe une base  $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $(e_1, \dots, e_r)$  soit une base de  $F$ .

**Théorème 3.3.** Soit  $E$  un evdf et  $F$  un sev de  $E$ .

Si  $\dim F = \dim E$ , alors  $F = E$ .

**Définition 3.4.** Un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$  est un sev de  $E$  de dimension  $\dim E - 1$ .

## 3.2 Sommes (directes) et dimension

**Lemme 3.5.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F_1, \dots, F_r$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension finie et en somme directe. Alors  $\bigoplus_{i=1}^r F_i$  est de dimension finie et  $\dim(\bigoplus_{i=1}^r F_i) = \sum_{i=1}^r \dim F_i$

**Proposition 3.6.** Soit  $E_1, \dots, E_r$  des espaces vectoriels de dimension finie.

Alors  $E_1 \times \dots \times E_r$  est de dimension finie, et  $\dim(E_1 \times \dots \times E_r) = \sum_{i=1}^r \dim E_i$

**Proposition 3.7.** Soit  $E$  un evdf et  $F$  un sev de  $E$ .

Alors  $F$  possède (au moins) un supplémentaire dans  $E$  et tous les supplémentaires de  $F$  sont de dimension  $\dim E - \dim F$

**Théorème 3.8** (Formule de Grassmann). Soit  $E$  un ev. Soit  $F, G$  deux sev de  $E$  de dimension finie.

Alors  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

**Théorème 3.9.** Soit  $F, G$  deux sev de dimension finie d'un ev  $E$ .

\*  $F$  et  $G$  sont en somme directe ssi  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$

\* Supposons  $E$  de dimension finie  $\dim E = \dim F + \dim G$ .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

(ii)  $F + G = E$

(iii)  $F$  et  $G$  sont supplémentaires :  $E = F \oplus G$

### 3.3 Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 3.10.** Soit  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs d'un ev  $E$ .

On définit le rang de cette famille :  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$

**Proposition 3.11.**

- \* On a  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq p$
- \* Si  $E$  est de dimension finie,  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq \dim E$  ( et donc  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq \min(p, \dim E)$  )
- \* On a  $(x_1, \dots, x_p)$  libre ssi  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$
- \* On a  $(x_1, \dots, x_p)$  engendre  $E$  ssi  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim E$
- \*  $(x_1, \dots, x_p)$  est une base de  $E$  ssi  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p = \dim E$

## 4 Applications linéaires et dimensions

### 4.1 Injectivité et surjectivité

**Théorème 4.1.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- \* Si  $F$  est de dimension finie et  $f$  injective, alors  $E$  est de dimension finie et  $\dim E \leq \dim F$
- \* Si  $E$  est de dimension finie et que  $f$  est surjective, alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$
- \* Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie et que  $\dim E = \dim F$ , LASSÉ :
  - (i)  $f$  injective.
  - (ii)  $f$  surjective.
  - (iii)  $f$  est un isomorphisme.

**Corollaire 4.2.** Soit  $E$  un evdf et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Alors  $f$  injectif  $\iff f$  surjective  $\iff f \in GL(E)$

**Corollaire 4.3.** Soit  $E$  un evdf et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . LASSÉ :

- (i)  $u$  est inversible à gauche :  $\exists v \in \mathcal{L}(E), v \circ u = id_E$
- (ii)  $u$  est inversible à droite :  $\exists v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = id_E$
- (iii)  $u$  est un isomorphisme.

**Théorème 4.4.** Soit  $A$  une  $K$ -algèbre et  $B$  une sous-algèbre de  $A$  de dimension finie.

Soit  $x \in B \cap A^\times$  (càd  $x \in B$  et il possède un inverse dans  $A$ ).

Alors  $x \in B^\times$  (càd l'inverse  $x^{-1} \in B$ ).

### 4.2 Rang d'une application linéaire

**Définition 4.5.** Soit  $E, F$  deux ev et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- \* On dit que  $f$  est de rang fini si  $\text{im } f$  est de dimension finie.
- \* Si c'est le cas, le rang de  $f$  est  $\text{rg}(f) = \dim(\text{im } f)$

**Proposition 4.6.** Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- \* Si  $E$  est de dimension finie, alors  $f$  est de rang fini, est  $\text{rg } f \leq \dim E$
- \* Si  $F$  est de dimension finie, alors  $f$  est de rang fini, est  $\text{rg } f \leq \dim F$

**Proposition 4.7.** Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

- \* Si  $f$  est de rang fini, alors  $g \circ f$  aussi et  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } f$
- \* Si  $g$  est de rang fini, alors  $g \circ f$  aussi et  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g$

**Proposition 4.8.** On reprend les notations de la question précédente.

- \* Si  $f$  est un isomorphisme et que  $g$  est de rang fini, on a  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g$
- \* Si  $g$  est un isomorphisme et que  $f$  est de rang fini, on a  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$

### 4.3 Théorème du rang

**Théorème 4.9** (du rang / rank-nullity theorem). Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- \* Soit  $S$  un supplémentaire de  $\ker f$  dans  $E$  ( $E = \ker f \oplus S$ ).  
Alors  $f$  induit un isomorphisme  $\tilde{f} : S \rightarrow \text{im } f$
- \* On a la formule du rang :  $\text{rg } f = \dim E - \dim \ker f$

**Corollaire 4.10.** Avec les mêmes notations, on a :

- \*  $f$  injective  $\iff \dim \ker f = 0 \iff \text{rg } f = \dim E$
- \*  $f$  surjective  $\iff \text{rg } f = \dim F$
- \*  $f$  iso  $\iff \text{rg } f = \dim E = \dim F$

On retrouve les résultats de la section 1.

### 4.4 Formes linéaires et hyperplans

**Définition 4.11.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

Une forme linéaire sur  $E$  est une AL  $E \rightarrow K$ .

On note  $E^* = \mathcal{L}(E, K)$  et on appelle dual de  $E$  l'espace des formes linéaires sur  $E$ .

**Proposition 4.12.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

- \* Soit  $\alpha \in E^*$  non nulle. Alors  $\ker \alpha$  est un hyperplan de  $E$ .
- \* Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ 
  - Il existe  $\alpha \in E^*$  non nulle tel que  $H = \ker \alpha$
  - Si  $\alpha, \beta \in E^*$  vérifient  $\ker \alpha = \ker \beta = H$  alors  $\exists \lambda \in K \setminus \{0\} : \beta = \lambda \alpha$

**Proposition 4.13.** Soit  $E$  un ev de dimension  $n$ .

- \* Tout sev  $F$  de  $E$  de dimension  $d$  est l'intersection  $F = H_1 \cap \dots \cap H_{n-d}$  de  $n - d$  hyperplans.
- \* Réciproquement, si  $H_1, \dots, H_r$  sont  $r$  hyperplans de  $E$ , alors  $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_r) \geq n - r$ .

**Définition 4.14.** Étant donné un sev  $F$  de  $E$ , on définit sa codimension  $\text{cod}(F) = \dim E - \dim F$

**Lemme 4.15.** Si  $F_1, \dots, F_r$  sont des sev de  $E$ , alors  $\text{cod}(F_1 \cap \dots \cap F_r) \leq \sum_{i=1}^r \text{cod}(F_i)$

## 5 Représentation matricielle

### 5.1 Matrices d'un vecteur, d'une famille, d'une AL

Dans toute cette section,  $E$  est un espace vectoriel de dim  $p$ , muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$

$F$  est un espace vectoriel de dim  $n$ , muni d'une base  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$

Rappel : Tout vecteur  $y \in F$  a une matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  sont tels que  $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$

**Définition 5.1.** Soit  $y_1, \dots, y_p \in F$ . On définit la matrice de la famille  $(y_1, \dots, y_p)$  dans la base  $\mathcal{C}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(y_1, \dots, y_p) = \left( \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y_1) \quad \cdots \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y_p) \right) \in M_{np}(K)$$

**Définition 5.2.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On définit le matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p)) = \left( \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1)) \quad \cdots \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_p)) \right) \in M_{np}(K)$$

**Définition 5.3.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On définit la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u) \in M_p(K)$$

**Proposition 5.4** ("évaluer c'est multiplier"). Soit  $x \in E$ .

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

**Corollaire 5.5.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a :

- \* Pour tout  $x \in E$ ,  $x \in \ker u \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \ker \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$
- \* Pour tout  $y \in F$ ,  $y \in \text{im } u \iff \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y) \in \text{im } \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$

**Proposition 5.6** ("composer c'est multiplier"). Soit  $E, F, G$  trois evdf de bases  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ ,  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_m)$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

## 5.2 Application linéaire associées à des matrices

**Théorème 5.7.**

- \*  $\text{Mat}_{\mathcal{C}} : F \rightarrow K^n$  est un isomorphisme (d'év).
- \*  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow M_{np}(K)$  est un isomorphisme (d'év).
- \*  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow M_p(K)$  est un isomorphisme (d'év).

**Corollaire 5.8.** On a  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$

**Corollaire 5.9** (du corollaire).

- \*  $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$
- \*  $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, K) = \dim E$

**Corollaire 5.10.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$

Alors  $u$  est un automorphisme ssi  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est inversible.

Autrement dit :  $u \in GL(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in GL_p(K)$

## 5.3 Rang d'une matrice

**Définition 5.11.** Soit  $A \in M_{np}(K)$

On définit le rang de  $A$  :  $\text{rg } A = \dim(\text{im } A)$

**Proposition 5.12.**

- \* Soit  $y_1, \dots, y_p \in F$ . On a  $\text{rg}(y_1, \dots, y_p) = \text{rg } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y_1, \dots, y_p)$
- \* Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a  $\text{rg } u = \text{rg } \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$

**Théorème 5.13.**

- \*  $\forall A \in M_{np}(K)$ ,  $\text{rg } A \leq \min(n, p)$
- \*  $\forall A \in M_{np}(K)$ ,  $\forall B \in M_{pq}(K)$ ,  $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$
- \*  $\forall A \in M_{np}(K)$ ,  $\begin{cases} \forall P \in GL_n(K), \text{rg}(PA) = \text{rg } A \\ \forall Q \in GL_p(K), \text{rg}(AQ) = \text{rg } A \end{cases}$

**Théorème 5.14** (Théorème du rang).

- \*  $\forall A \in M_{np}(K), \text{rg } A = p - \dim \ker A$
- \* Pour tout  $A \in M_{np}(K), \ker A = \{0_{K^p}\} \iff \text{rg } A = p$   
 $\text{im } A = K^n \iff \text{rg } A = n$
- \* En particulier, pour tout  $A \in M_n(K),$  on a  
 $\text{rg } A = n \iff A \in GL_n(K) \iff \ker A = \{0_{K^n}\} \iff \text{im } A = K^n$

**Corollaire 5.15.** Soit  $A \in M_{np}(K)$  et  $A' \in M_{np}(K)$  la matrice obtenue en effectuant des opérations élémentaires (échanges, dilatations, transvections) sur les lignes et les colonnes de  $A$ . Alors  $\text{rg}(A') = \text{rg}(A)$   
 "Le rang est invariant par opérations élémentaires".

## 6 Changement de bases

### 6.1 Formules

**Définition 6.1.** Soit  $F$  un ev de dimension  $n$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  et  $\mathcal{C}' = (f'_1, \dots, f'_n)$  deux bases de  $F$ .  
 On définit la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$  :

$$P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'} = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f'_1, \dots, f'_n)$$

**Proposition 6.2.** Soit  $F$  un ev de dim  $n$  et  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ .

- \* On a  $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'} = \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}(id_F)$
- \* On a  $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'} \in GL_n(K)$  et  $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'}^{-1} = P_{\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}}$
- \* Pour toute matrice  $Q \in GL_n(K)$  et toute base  $\mathcal{D}$  de  $F$ , il existe une unique base  $\mathcal{D}'$  de  $F$  telle que  
 $P_{\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'} = Q$

**Théorème 6.3** (Changement de bases pour un vecteur). Soit  $F$  un ev de dim  $n$  et  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ .  
 Pour tout  $x \in F$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}'}(x) = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(x)$$

**Théorème 6.4** (Changement de bases pour les AL). Soit  $E$  et  $F$  deux ev, de dimension  $p$  et  $n$  respectivement.  
 Soit  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et deux bases  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  de  $F$ . Alors, pour tout  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u) = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

**Corollaire 6.5.** Soit  $E$  un ev de dim  $p$  et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

### 6.2 Similitude

**Définition 6.6.** Deux matrices  $A, B \in M_p(K)$  sont semblables (et on note  $A \sim B$ ) si  $\exists P \in GL_p(K) : B = P^{-1}AP$

Remarque : D'après ce qui précède,  $A \sim B$  ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases.

**Proposition 6.7.**  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $M_p(K)$

### 6.3 Équivalence

**Définition 6.8.** Soit  $A, B \in M_{np}(K)$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont équivalents s'il existe  $P \in GL_n(K)$  et  $Q \in GL_p(K)$  telles que  $B = PAQ$

Remarque : Deux matrices sont équivalentes ssi elles représentent la même AL dans deux couples de base.

**Proposition 6.9.** La relation d'équivalence est une relation d'équivalence.

**Théorème 6.10.**

- \* Deux matrices de  $M_{np}(K)$  sont équivalentes ssi elles ont le même rang.
- \* Toute matrice de  $M_{np}(K)$  de rang  $r \in \llbracket 0, \min(n, p) \rrbracket$  est équivalente à

$$J_r = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & (0) \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ \hline & & & & (0) \end{array} \right) = \sum_{k=1}^r E_{k,k}$$

## 6.4 Rang d'une transposée

**Théorème 6.11.** Soit  $A \in M_{np}(K)$ .

Alors  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$

**Lemme 6.12.**  $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$  (que l'on appelle la base duale de  $\mathcal{B}$ ).

**Définition 6.13.** Soit  $A \in M_{np}(K)$ .

Soit  $I = \{i_1, \dots, i_q\} \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $J = \{j_1, \dots, j_s\} \subseteq \llbracket 1, p \rrbracket$  tels que  $i_1 < \dots < i_q$  et  $j_1 < \dots < j_s$

On définit alors la matrice extraite :

$$A_{I,J} = (a_{i_k, j_l})_{\substack{1 \leq k \leq q \\ 1 \leq l \leq s}} \in M_{qs}(K)$$

Autrement dit, on ne garde que les lignes dont le numéro appartient à  $I$  et les colonnes dont le numéro appartient à  $J$ .

**Théorème 6.14.** Soit  $A \in M_{np}(K)$ .

- \* Toute matrice extraite de  $A$  possède un rang  $\leq \text{rg } A$
- \* Le rang de  $A$  est la taille maximale d'une matrice carrée inversible extraite de  $A$ .

## 6.5 Forme des matrices carrées

Soit  $E$  un ev de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Examinons des cas où  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  possède des formes remarquables.

1)

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(K)$$

signifie  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = \lambda_i e_i$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est diagonalisable ssi  $\mathcal{B}$  est une base de vecteurs propres de  $u$ . On dira que  $u$  est diagonalisable s'il existe une telle base.

2)

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left( \begin{array}{c|c} * & * \\ \hline (0) & * \end{array} \right)$$

"triangulaire par blocs"

Signifie  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, u(e_i) \in \text{Vect}(e_i, \dots, e_r)$

Autrement dit,  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$  stable sous  $u$ .

3)

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left( \begin{array}{c|c} * & (0) \\ \hline (0) & * \end{array} \right)$$

"diagonale par blocs"

Signifie que  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$  et  $\text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$  sont stables sous  $u$ .

Autrement dit,  $u$  stabilise les deux sev de la décomposition  $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \oplus \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$

4)

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} * & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & * \end{pmatrix} \in T_n^+(K)$$

Signifie que  $u$  stabilise tous les sev  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ , pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  qui forment une suite de sev emboîtés les uns dans les autres (ce qu'on appelle un drapeau. Ici, on a des sev de toutes les dimensions, donc on parle de drapeau complet).